



Modellierung des Erdklimas und
Prognoseberechnung der Erderwärmung
in verschiedenen Treibhausgasemissionsszenarien
mit einem rückgekoppelten Strahlungsbilanzmodell
und dem Euler-Cauchy- sowie Runge-Kutta-Verfahren
programmiert in JAVA

Charlotte Bockhorst
Physik & Informatik
Herr Faßbender
IF-LK
Q2

Inhalt

Einleitung	3
Das Klima.....	4
Das Modell	6
Das Programm.....	7
GUI	10
Euler-Cauchy	11
Runge-Kutta	13
Vergleich Runge-Kutta und Euler-Cauchy in der Praxis	15
CO2 Szenarien	17
Auswertung.....	19
Erweiterungsmöglichkeiten	21
Literaturverzeichnis.....	23

Einleitung

Der Klimawandel auf unserer Erde ist ein hochaktuelles und stark diskutiertes Thema. Es wird ständig darüber gesprochen, welche Ursachen der Klimawandel hat und welche Folgen er nach sich zieht. Dazu versuchen Klimaforscher möglichst genaue Voraussagen darüber zu treffen, wie sich unser Klima in den nächsten Jahren verändern wird. Dies ist jedoch sehr anspruchsvoll, da unser Ökosystem so komplex ist, dass es kaum möglich ist, alle Faktoren in diese Voraussagen mit einzubeziehen. Daher versucht man herauszufinden, welche Faktoren besonders viel Einfluss auf unser Klima haben und mithilfe dieser dann ein vereinfachtes Modell aufzustellen, das grobe Vorhersagen über das Klima zulässt. Diese sind zwar nicht 100% sicher, zeigen aber, fundierte, Tendenzen auf.

Das Klima

Zur Betrachtung unseres Klimas bzw. des Klimawandels ist es zuallererst wichtig, abzugrenzen, was genau man unter Klima versteht insbesondere im Gegensatz zum Wetter.

Das Wetter setzt sich aus Zuständen unserer Umwelt zusammen, die wir tagtäglich wahrnehmen. Ob es grade kalt oder warm, nass oder trocken ist kann man immer messen. Es gibt außerdem extreme Wetterlagen wie Stürme oder Dürre.

Das Klima ist jedoch nichts, was man spürt, zumindest nicht direkt. Es bildet sich eher aus den langfristig beobachteten Wetterlagen an einem Ort oder in unserer Atmosphäre ab. So lässt sich unser Weltklima z.B. durch die durchschnittliche Oberflächen-Temperatur auf der Erde beschreiben, die mithilfe von Temperaturmessungen auf der ganzen Welt näherungsweise, empirisch berechnet werden kann. Eine anderer mögliche Kenngröße für das Klima wäre die durchschnittliche Niederschlagsmenge.¹

Auch wenn wir meist keine direkten Auswirkungen des Klimas spüren, so hat es doch Einfluss auf das Wetter. Extreme Abweichungen vom Klima, also extreme Wetterbedingungen, sind nämlich grundsätzlich normal und schaden unserem Ökosystem im Normalfall nicht wesentlich oder zumindest nicht langfristig, wie z.B. heiße Sommertage ohne Regen oder erhöhter Niederschlag im Herbst. Ein Klimawandel verursacht nicht direkt, dass es jeden Sommer wärmer wird oder, dass Umweltkatastrophen stattfinden, macht diese jedoch immer wahrscheinlicher. Außerdem werden so besonders extreme Wetterereignisse wahrscheinlicher, die die Lebensqualität von Menschen auf der ganzen Welt beeinträchtigen können. Auch ein durchschnittlich gering wärmeres Klima kann ebenfalls Auswirkungen haben. Außerdem haben Klimaänderungen an einem bestimmten Ort oft auch Veränderung der Flora und Fauna zur Folge, was eine Bedrohung für bestimmte Tierarten darstellen kann und eine Verbesserung für andere.²

Welche Folgen konkret der Klimawandel letztendlich insgesamt haben wird, ist jedoch schwer vorherzusagen. Es lassen sich aber schon heute ein Wandel in Flora und Fauna in verschiedenen Gebieten ablesen, da unser Ökosystem stark mit dem Klima verbunden ist und sich dementsprechend verändert. Außerdem wird voraussichtlich viel Land aufgrund von Überschwemmung verloren gehen.

¹ Vgl.4, S.22-26

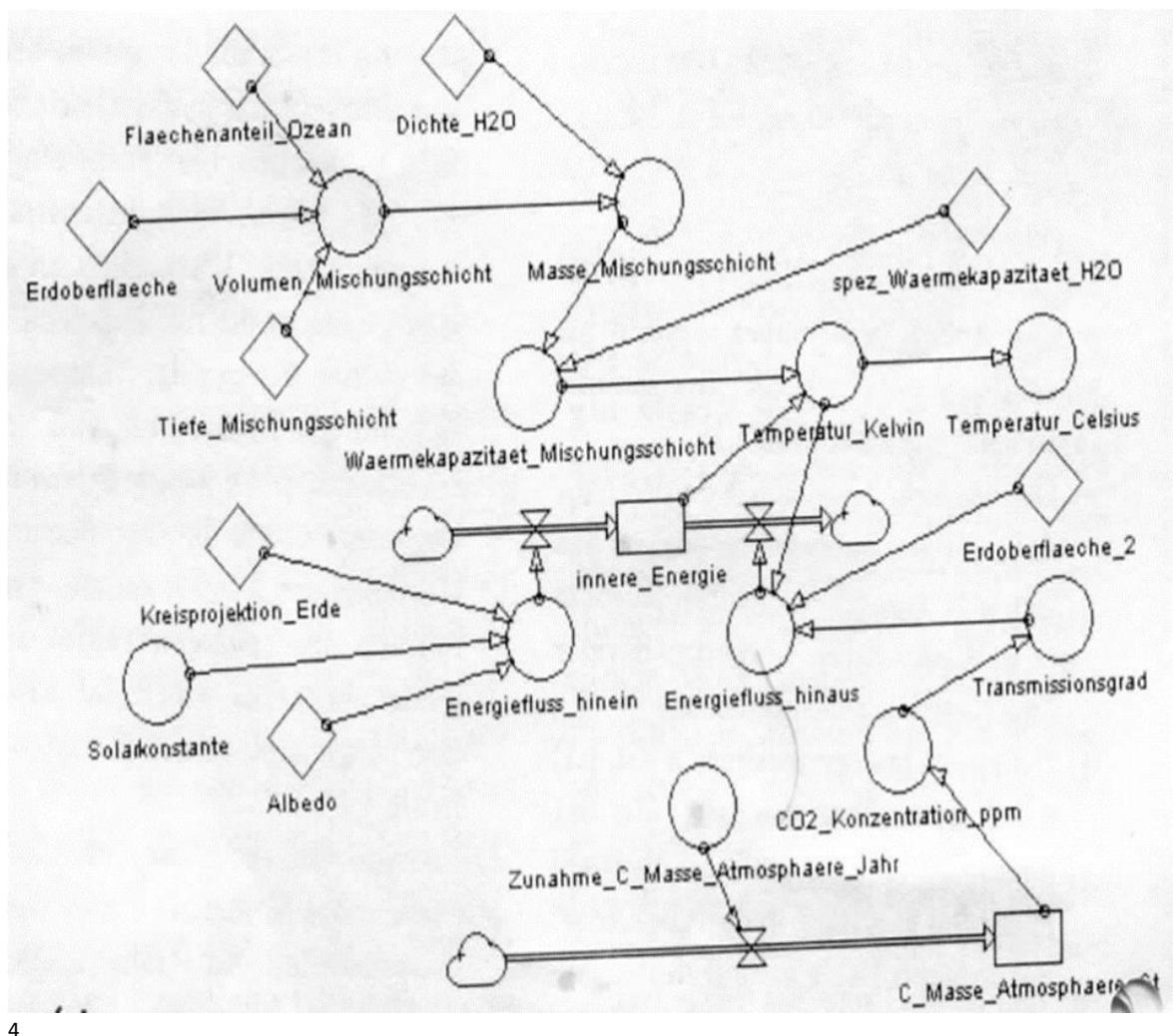
² Vgl.4, S.22-27

Daher ist es von großem Interesse zu versuchen die Entwicklung unseres Klimas vorauszusagen und dementsprechend rechtzeitig Maßnahmen für die Zukunft zu ergreifen.

Im Klima Modell, welches die hier vorgestellte Anwendung simuliert wird, die Durchschnittstemperatur als Kenngröße für das Klima verwendet, da sich diese mithilfe grundlegender Physikalischer Zusammenhänge näherungsweise berechnen lässt und eine grobe Vorstellung über den Wandel unseres Klimas geben kann.

Das Modell³

Zur Simulation des Klimas gibt es verschiedene Ansätze und somit verschiedene Modelle, die unterschiedlich komplex sind. In dem hier vorgestellten Programm wird ein nulldimensionales Energiebilanzmodell (EBM) verwendet. Dieses berechnet die durchschnittliche Oberflächentemperatur unserer Erde auf Basis der Sonnen Strahlung, die die Erde absorbiert und der Wärmestrahlung, die sie wieder abgibt. Dabei werden noch verschiedene weitere Parameter berücksichtigt, die das Modell immer genauer werden lassen, wenn auch nicht ansatzweise der Realität entsprechend. Diese Parameter sind nicht ortsabhängig, sondern Durchschnittswerte von verschiedenen Regionen unserer Erde, da das Modell nulldimensional ist. Eine Weitere wichtige Größe im Modell ist die Wärmekapazität der Erde. In diesem Modell werden Ausgangswerte die ungefähr aus dem Jahr 2005 stammen verwendet. Trotzdem ist das Modell heute noch anwendbar, da Klimaforschung eher Langfristige Tendenzen als aktuelle Werte verwendet und betrachtet.



4

³ vgl. 3 Seite 58 (Quelle für das gesamte Kapitel)

⁴ Abb.3, vgl. 1 Seite 58

Das Programm

Im Java Programm, welches das Modell berechnet, ist die Berechnung der verschiedenen Größen auf unterschiedliche Klassen aufgeteilt, um spätere Erweiterungen in Form von neuen Größen und genaueren Näherungen für bereits bestehende Größen zu vereinfachen.

Das Herzstück der Verwirklichung des Modells bildet die Klasse Basis. Dort wird mithilfe der Verfahren von Euler-Cauchy und Runge-Kutta die Temperatur (T) in Kelvin berechnet und dann in Celsius umgewandelt. Außerdem wird hier die Differenz zwischen eingehender Sonnenstrahlung (Q_{ein}) und ausgehender Wärmestrahlung (Q_{aus}) (innerhalb eines Intervalls) gebildet, um die Innere Energie der Erde (U) zu bestimmen, da man mit dieser kombiniert mit der Wärmekapazität (C) die Temperatur berechnet.

$$U = \Delta t * (\Delta Q_{aus} - \Delta Q_{ein})$$

$$T = \frac{U}{C}$$

$$T_{cel} \approx T - 273.15$$

Die Berechnung der ausgehenden Strahlung findet in der Klasse „Qaus“ statt. Die Klasse speichert die Stefan-Boltzmann Konstante(σ) und verwaltet einen Transmissionsgrad (τ) mit Getter und Setter, welcher abhängig von der Zeit den Transmissionsgrad aktualisiert. Da der Transmissionsgrad von der Zusammensetzung unserer Atmosphäre abhängig ist, wird er hier abhängig vom CO₂ Gehalt der Atmosphäre verändert, welcher näherungsweise mithilfe empirisch festgestellter Funktionen modelliert wird. Das geschieht auf Basis früherer Messwerte des CO₂ und des Transmissionsgrad und verschiedenen möglichen Szenarien zukünftiger Entwicklungen. Der Transmissionsgrad gibt, wie der Name bereits vermuten lässt, an, wie viel Strahlung durch die Atmosphäre nach außen dringen kann und ist somit ein zentraler Parameter im Treibhauseffekt. Die Steffan-Boltzmann Konstante ermöglicht es, aus der Temperatur und dem Emissionsgrad eines Körpers die Strahlungsintensität eines Körpers zu berechnen. Da der Emissionsgrad der Erde gegen null geht, wird er hier ignoriert. Um die gesamte Strahlung der Erde zu berechnen, benötigt man außerdem die ungefähre Größe der Erdoberfläche, die hier näherungsweise mit einer Kreisfläche mit dem Radius der Erde (K_E) mal 4 berechnet wird.

$$Q_{aus} = T^4 * \tau(t) * \sigma * 4 * K_E$$

Die Methode zur Berechnung der ausgehenden Strahlung Q_{aus} gibt es zwei Mal in der Klasse, mit verschiedenen Parametern. Beide Methoden benötigen die Zeit, die eine nimmt aber die Temperatur als zweiten Parameter während die

andere Methode die Innere Energie als zweiten Parameter hat, da für das Runge-Kutta Verfahren es einfacher ist, U als übergebenen Parameter zu verwenden, auch wenn es grundsätzlich keinen Unterschied macht, wo genau T nun berechnet wird, da die Wärmekapazität C in diesem Modell konstant ist. Daher wird C ebenfalls in der Klasse gespeichert, sodass T mithilfe von U berechnet werden kann.

Zur Berechnung der aufgenommenen Sonnenstrahlung gibt es ebenfalls eine eigene Klasse: „Qein“. Diese Klasse speichert die Solarkonstante der Sonne (S) und den Albedo Wert der Erde (α), welcher angibt, wie viel Prozent der Sonnenstrahlung durch z.B. Eisflächen reflektiert wird. Außerdem besitzt die Klasse eine Getter- und Setter Methode für Qein, wobei die Setter Methode abhängig von der Zeit ist und sowohl Qein als auch die Solarkonstante aktualisiert, die sich immer im Verlauf eines Jahres ändert, da diese die eingehende Strahlung der Sonne repräsentiert. Um sicher zu gehen, dass immer der Aktuelle Wert für Qein abgerufen wird, ruft die Methode „getQein“ auch „setQein“ auf. Um die insgesamt eingehende Strahlung zu berechnen muss außerdem die „eingehende Strahlung“, mit der Fläche, auf die sie trifft, multipliziert werden. Dazu wird hier eine Fläche genommen, die einer Kreisfläche mit dem Radius der Erde entspricht (K_E), da die Sonne immer nur einen Teil der Erde anstrahlt und das mit unterschiedlicher Intensität.

$$Q_{ein} = (1 - \alpha) * S(t) * K_E \text{ mit}$$

$$S(t) = 1365 + 0.7 * \sin\left(2\pi * \frac{t}{11}\right)$$

Die letzte Klasse, die direkt zum Modell gehört, ist „W_Kap“. Diese Klasse verwaltet die Wärmekapazität C, welche in dieser Version des Modells konstant ist. Daher speichert die Klasse lediglich die Konstanten, die benötigt werden, um eine Näherung für die Wärmekapazität zu berechnen. Da der überwiegende Anteil der Erdwärme im Wasser der Meere gespeichert wird, speichert die Klasse das ungefähre Volumen der Ozeane (V_O), die Dichte (ρ_{H_2O}) und die spezifische Wärmekapazität von Wasser (c_{H_2O}). Um V_O zu berechnen, verwendet man hier die Oberfläche der Erde, multipliziert diese mit dem Anteil der Ozeane an der Erdoberfläche (b) und multipliziert dies wiederum mit der durchschnittlichen Tiefe der Wassermassen(d), sodass sich eine Näherung für das Volumen der Ozeane ergibt. Das Produkt dieser Konstanten bildet hier dann C. Außerdem gibt es in der Klasse einen Getter für C.

$$C = V_O * \rho_{H_2O} * c_{H_2O} \quad \text{mit}$$

$$V_O = K_E * 4 * b * d$$

Das Programm hat außerdem eine Hilfsklasse „K“, welche Konstanten speichert, die in verschiedenen Klassen verwendet werden, hier die Größe einer

Kreisfläche mit dem Radius der Erde (K_E) und den Umrechnungsfaktor um Sekunden in Jahre umzurechnen. Außerdem gibt es in der Klasse zwei Methoden. Einmal die Methode „scN“ um Zahlen in der Wissenschaftlichen Schreibweise (scientific numbers) einfacher zu berechnen, ohne jedes Mal die Methode „pow“ der Klasse „Math“ aufrufen zu müssen. Die zweite Methode „round“ rundet eine Zahl auf eine bestimmte Anzahl an Nachkommastellen.

$$K_E = \pi * r_E^2$$

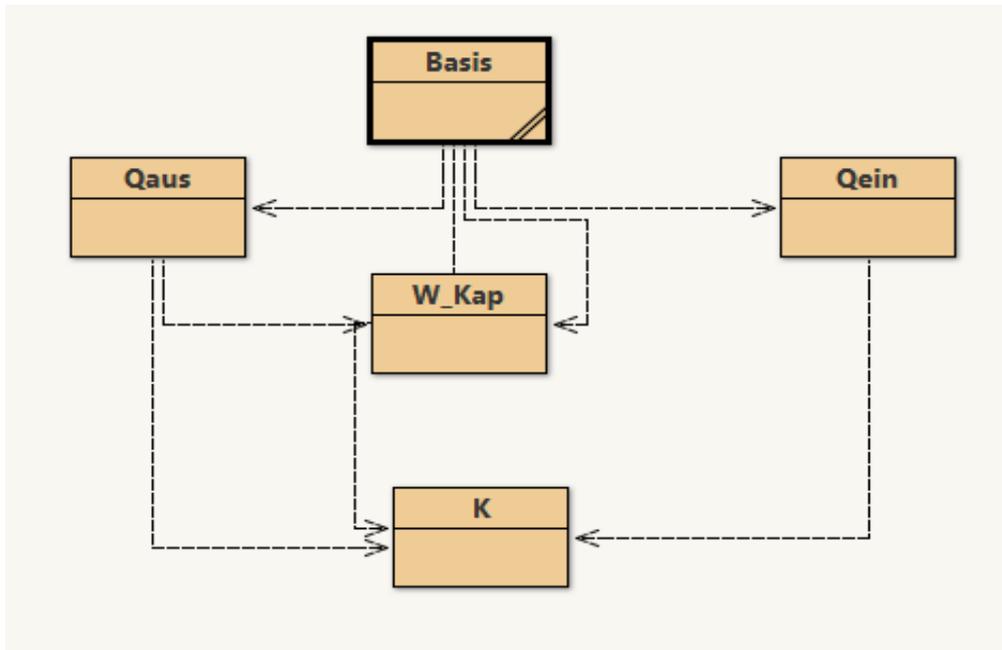


Abb.2

GUI

Das Programm ist in zwei Packages unterteilt, „model“ und „GUI“. In „model“ befinden sich alle modellrelevanten Klassen, die im letzten Kapitel beschrieben wurden. Im „GUI“ Package sind alle Klassen zur Darstellung der Daten und der Benutzeroberfläche. Die Klasse „MainMenu“ übernimmt dabei die Darstellung des Menüs, in dem sich alle Parameter für die Berechnung eingeben lassen:

- die Endzeit, welche angibt wie lange die Simulation gehen soll, in welcher Schrittweite die Zahlen berechnet werden sollen, um die Genauigkeit der Zahlen erhöhen zu können
- das CO₂ Szenario, d.h. von welcher Menge an CO₂ im Verlauf der Jahre ausgegangen werden soll.
- mit welchem Algorithmus gerechnet werden soll.

Außerdem übernimmt die Klasse das aufrufen von Fehler Meldungen, wenn die berechneten Werte zum Beispiel zu groß sind. Um dies zu gewährleisten, haben die hier aufgerufenen Methoden den Rückgabewert „boolean“, welcher zurückgibt, ob die Werte zu groß sind (false) oder nicht.

„MainFrame“ erweitert die Klasse „JFrame“ (Unterklasse von „swing“) und ist nur dazu da, ein „GraphPanel“ anzuzeigen.

„GraphPanel“ erweitert die Klasse „JPanel“ (Unterklasse von „swing“) und stellt einen Graphen, basierend auf einem Array da. Dabei können eine Untergrenze und eine Obergrenze der Werte angegeben werden, die dann die y-Werte im Ursprung und am obersten Punkt der y-Achse bestimmen. Dadurch und mithilfe einer Skalierung der Punkte im Koordinaten-System auf Basis der Anzahl der Werte und des Werte-Bereichs, wird sichergestellt, dass alle Werte innerhalb des gezeichneten Koordinaten-System angegeben werden. Um den letztendlichen Graphen zu erzeugen, werden Linien zwischen jedem Wert des Arrays gezeichnet. Da der Abstand der Punkte aufgrund der festen Schrittweite immer gleich ist, reicht es die y-Werte, also die Temperaturen, im Array zu speichern.

Bei den Graphen der Anwendung ist daher zu beachten, dass Graphen verschiedener Rechnungen, unterschiedlich skaliert sein können, worauf bei einem Vergleich gegebenenfalls geachtet werden muss. Ist der Graph immer auf die Werte angepasst, die dadurch immer so gut, wie es das Szenario zulässt, erkennbar sind.

Euler-Cauchy

Das Euler Cauchy Verfahren ist dazu da, Differentialgleichungen numerisch zu berechnen bei denen $y'(t) = f(t, y(t))$ und ein Anfangswert $y(t_0)$ gegeben sind. Um $y(t)$ zu berechnen, geht man Schritt für Schritt vor. Da man $y(t)$ mit $f(t, y(t))$ berechnet, kann man bei der Berechnung von $f(t, y(t))$ nicht den exakten Wert für y nehmen. Daher nimmt man einen ungefähren, in diesem Fall den zuvor berechneten, Wert von y , da dies der Wert ist, der (vermutlich) am nächsten an y liegt, insbesondere im gegebenem Modell, wo man davon ausgehen kann, dass es keine plötzlichen und rapiden Änderungen der Werte gibt. Um y mit f zu berechnen, muss man die Gesamtänderung von y auf dem Intervall ausrechnen, da man den vorigen Wert entweder bereits berechnet hat oder dieser dem Anfangswert entspricht. Da wir die Ableitung von y kennen, und näherungsweise Punkte berechnen können, lässt sich die Ableitung auch näherungsweise integrieren, indem man den Flächeninhalt unter der Funktion berechnet, indem man den Wert der Ableitung am Ende oder am Anfang des betrachteten Integrationsintervall mit der Intervallbreite multipliziert. Dann muss man die Gesamtänderung von y zum „bisherigen“ Wert von y dazu addieren und bekommt so den nächsten Wert für y . Als Formeln ausgedrückt sieht das folgendermaßen aus:

Es sind gegeben:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{und} \quad y(t_0)$$

Man hat eine Schrittweite s , so dass:

$$t_k = s * k \quad \text{für } k \in \mathbb{N}\{0\}$$

Da

$$y(t_k) = y(t_k - 1) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, y(t)) dt$$

$$f(t, y(t_k)) \approx f(t, y(t_k - 1))$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t, y(t)) dt \approx s * f(t, y(t_k))$$

Lässt sich mit

$$y(t_k) = y(t_k - 1) + s * f(t_k, y(t_k - 1))$$

y näherungsweise bestimmen, da $y(t_0)$ bekannt ist. ^{5,6}

⁵ Vgl. 7

⁶ Vgl. 12

Im Modell handelt es sich bei „y“ um die Innere Energie der Erde, U, welche von der Temperatur abhängig ist, welche wiederum von U abhängig ist. Die Änderung von U entspricht der Änderung der Differenz von der Eingehenden Strahlung und der Ausgehenden Strahlung. Die Gleichung lautet dann:

$$U(t_k) = U(t_k - 1) + \Delta U(t_k, U(t_k - 1)) * \Delta t$$

Im Programm ist das Euler- Cauchy Verfahren in der Methode „calc“ der Klasse „Basis“ verwirklicht. Die Methode übernimmt eine Endzeit und eine Schrittweite, da die Innere Energie im Modell konstant bleibt und ungefähr, sollte man mit ihr die Temperatur ausrechnen, mit ca. 14°C zum aktuellen Wert der Durchschnittstemperatur führen. Am Anfang der Methode werden die Innere Energie, die Temperatur, eingehende - und Ausgehende Strahlung, die Schrittweite, die Endzeit und ein Array für die berechneten Temperaturen initialisiert. Dann wird innerhalb einer for-Schleife immer wieder erst die aktuelle Temperatur im Array gespeichert, dann jeweils Q_{ein} und Q_{aus} zum aktuellen Zeitpunkt berechnet die Differenz gebildet und mit der Schrittweite multipliziert (und somit näherungsweise Integriert). Das Ergebnis wird zu der Inneren Energie dazugerechnet. Am Ende wird noch die Temperatur neu berechnet. Diese For Schleife läuft solange, bis die „Endzeit erreicht“ ist. Daraufhin überprüft die Methode noch, ob die Werte noch im Double Bereich sind und gibt, sollte dies nicht der Fall sein, „false“ zurück, um eine entsprechende Fehlermeldung auszulösen. Dann wird mit dem Array und verschiedenen anderen Werten als Parametern ein neues Objekt der Klasse „MainFrame“ erstellt, welche einen Graphen erzeugt, der die berechneten Werte für die Temperatur graphisch darstellt.

Runge-Kutta

Das hier verwendete klassische Runge-Kutta Verfahren, ist ebenfalls ein Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen, wobei wieder die gleichen Voraussetzungen gelten, wie beim Euler-Cauchy Verfahren. Jedoch wird hier nicht der jeweils „nächste“ Wert mit dem vorigen und dem jeweiligen Wert von t berechnet, sondern es werden verschiedene „zwischenwerte“ berechnet und am Ende, unterschiedlich gewichtet, zur Berechnung der Gesamtänderung über ein Intervall verwendet.

Vorraussetzung:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{und} \quad y(t_0) \quad \text{sei gegeben}$$

Beim Runge-Kutta Verfahren lautet die Verfahrensfunktion, mit der man den approximierten Wert für $y'(t)$ berechnet:

$$\Phi(t_i, u_i, h, f) = \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \quad \text{mit}$$

$$k_1 = f(t_i, u_i)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, u_i + hk_3)$$

wobei h die Schrittweite sei und u_i ungefähr $f(t_i)$ entsprechen soll.

Grundsätzlich sieht es fast so aus, als Teile man einen „Schritt“ lediglich in mehrere auf, um ein genaueres Ergebnis zu erhalten. Jedoch verwendet man bei der Berechnung von k_3 den selben Wert für t , wie für k_2 , sodass man sozusagen einmal einen etwas zu kleinen und einen etwas zu großen Wert anstatt $f\left(t_i + \frac{h}{2}, y\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\right)$ versucht zu ermitteln, um diesen Abschnitt besser eingrenzen zu können. Die Werte für k_2 und k_3 werden außerdem in der Verfahrensfunktion doppelt genommen. Dies hat zur Folge, dass in der Berechnung von u einbezogen wird, dass die Funktion f keine lineare Funktion ist und man versucht, eine Kurve zu integrieren, wobei auch bei einer linearen Funktion das Verfahren nicht weniger gut funktionieren würde, aber auch nicht besser als das Euler-Cauchy-Verfahren. Sollte nämlich f eine lineare Funktion sein, wäre, angenommen unsere Werte entsprächen dem, was wir berechnen wollen, $2k_2 = k_4$ und $2k_3 = k_4$. Da sie das jedoch nicht sind, und f auch nicht linear ist, wird so einmal durch einen etwas größeren Wert und einem etwas kleineren Wert der Wert für f bei $t+0.5h$ eingegrenzt, und die Form der Kurve in die Rechnung mit einbezogen. Sollte die Kurve relativ „tief“ verlaufen, würde so der letztendliche Wert von Φ durch die Werte von k_2 und k_3 kleiner werden und

umgekehrt, wenn die Kurve relativ „flach“ wäre. Letztendlich wird der Wert für u_{i+1} (also die Näherung für $y(t_{i+1})$) mit

$$u_{i+1} = u_i + \frac{1}{6}h * \Phi(t_i, u_i, h, f) = u_i + h \times \frac{1}{6} \times (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

berechnet. Es wird also der Mittelwert der verschiedenen „k“-Werte gebildet, um einen möglichst genauen Wert der Änderungsrate zu bekommen, der dann mit h multipliziert wird, um wieder die Gesamtänderung auf dem Intervall herauszufinden und diese zum vorherigen Wert von u dazu zu addieren.⁷

Im Programm ist das Runge-Kutta Verfahren in der Klasse „Basis“ umgesetzt mit den Methoden „RungeKutta“ und „getU“. „getU“ ist hier die Funktion f und übernimmt daher die Zeit t und einen Wert für U als Parameter und berechnet dann auf der Basis dieser Parameter die Änderungsrate der Inneren Energie U . In der Methode „RungeKutta“ werden am Anfang die Schrittweite, die Endzeit die Variablen für die Zwischenwerte (k_0 - k_3), der Anfangswert für U , t für die Zeit, T als Variable für die Temperatur und das Array „Temp“ für die Ergebnisse der Temperatur initialisiert. Dann wird innerhalb einer for-Schleife immer wieder die Temperatur T berechnet, und das klassische Runge-Kutta Verfahren mit „getU als Funktion“ wiederholt, sodass man am Ende mit dem Array „Temp“ mit den verschiedenen Temperaturwerten wieder einen Graphen erzeugen kann.

⁷ Vgl.1 & 13

Vergleich Runge-Kutta und Euler-Cauchy in der Praxis

Grundsätzlich ist der Fehler, also die Abweichung der Näherung von den exakten Werte, des Runge-Kutta-Verfahren im Normalfall kleiner als der des Euler-Cauchy Verfahren, da man keine „Geraden“ näherungsweise bestimmt, sondern die Änderung als Kurve modelliert. Dies erfordert jedoch auch mehr Rechenaufwand, weshalb es bei mehr Rechnungen sinnvoll sein kann, eher das Euler-Cauchy Verfahren zu verwenden.

Wenn man im Programm einen längeren Zeitraum mit ausreichend kleiner Schrittweite berechnet, z.B. 100 Jahre als Endzeit mit einer Schrittweite von einem Monat sieht man kaum einen Unterschied zwischen den Graphen^{8,9} und der Unterschied zwischen den berechneten Temperaturen sind nicht all zu groß, besonders da das Modell auch eher dazu da ist, um Tendenzen in der Klimaänderung zu erkennen.

Sollte man jedoch die Schrittweite auf z.B. ein Jahr erhöhen, lassen sich erste Unterschiede im Graphen erkennen. Durch die sich ändernde Solarkonstante schwankt die Durchschnittstemperatur, was hier aufgrund der linearen Approximationen des Euler-Cauchy Verfahren zu signifikanten Unterschieden der Graphen führt^{10,11}

Noch deutlicher werden die Unterschiede, wenn man die Schrittweite weiter erhöht, auf beispielsweise 4 Jahre. Dann erkennt man beim Graphen des Euler-Cauchy Verfahrens einzelne Geradenstücke¹², da die berechneten Werte sehr weit gestreut sind, während beim Runge-Kutta Verfahren immer noch nur leichte Schwankungen des Graphen zu erkennen sind.¹³ Durch die Verringerung der Endzeit kann dieser Effekt leicht verstärkt werden, was jedoch eher daran liegt, dass man dann weniger Werte berechnet. Die Unterschiede der Verfahren werden dabei nicht unbedingt größer.

Diese Simulationen sind alle mit dem SRES A2 Szenario erstellt, in dem der CO₂ in der Atmosphäre zunimmt. Wenn man hingegen den CO₂ wert konstant lässt, sollte der Graph der Temperatur lediglich die Funktion der Solarkonstante abbilden, da alle anderen Werte konstant bleiben. Wenn man hier jedoch mit den beiden Verfahren einen Graphen erstellt, scheinen die Werte nahezu konstant zu bleiben^{14,15}, bis man die Schrittweite verringert. Dann kann man besonders gut beim Euler-Cauchy Verfahren die Sinusfunktion für die

⁸ Abb.5

⁹ Abb.6

¹⁰ Abb.7

¹¹ Zum Vergleich: Abb. 8

¹² Abb.9

¹³ Abb.10

¹⁴Abb. 11

¹⁵ Abb. 12

Solarkonstante erkennen^{16,17}. Hier kann es also zum Beispiel von Interesse sein, beide Verfahren anwenden zu können.

¹⁶ Abb. 13

¹⁷ Abb. 14

CO₂ Szenarien

In der Anwendung gibt es die Auswahl zwischen vier CO₂ Szenarien. Einmal gibt es die Möglichkeit, den CO₂ Wert und damit den Transmissionsgrad konstant zu behalten, und somit zu simulieren, wie sich die mittlere Temperatur an der Erdoberfläche entwickeln würde bzw. sich entwickelt hätte, wenn sich der CO₂ Gehalt in der Atmosphäre der Erde seit dem Jahr 2005 nicht mehr verändert hätte. Hier bleibt die Temperatur weitgehend konstant, nur durch die Solarkonstante kommt es zu Schwankungen.¹⁸

Dann gibt es eine Näherung für das SRES Szenario A2 welches vom IPCC (Intergovernmental Panel on Climate Change) in Auftrag gegeben und veröffentlicht wurde¹⁹. Dies ist eines der Szenarien, das modellieren soll, wie sich unsere Welt entwickeln wird, und wie sich dementsprechend unser Klima verändert. In diesem Szenario wird davon ausgegangen, dass sich die meisten Länder sehr unterschiedlich entwickeln werden und der Fokus auf nationaler Kultur liegen wird. Das Ausgangsjahr hier ist das Jahr 2000. Das SRES A2 geht von einem relativ hohen Anstieg des CO₂ Gehalt in der Luft aus, dieser ist hier von einem starkem Bevölkerungswachstum und einer Wirtschaft verursacht, welche unkontrolliert wachsen kann. Bei diesem Szenario beträgt die durchschnittliche Oberflächentemperatur der Erde 2100 ungefähr 18 Grad.

Die zugehörigen Formeln für alle Szenarien und die Änderung des Transmissionsgrad sind Näherungen, welche durch Werte zwischen 1975 und 2005 entstanden sind und entsprechend der vorhergesagten Änderungen bezüglich der Temperatur angepasst wurden.

Ein weiteres Szenario im Programm ist ebenfalls ein SRES Szenario, das B1 Szenario welches das Gegenteil vom A2 Szenario darstellt²⁰. In diesem Szenario wird davon ausgegangen, dass in Zukunft global gegen den Klimawandel vorgegangen wird und neue Technologien entstehen, welche es uns ermöglichen effizienter und ökologischer zu Wirtschaften. Gleichzeitig wächst der Dienstleistungssektor, wodurch noch weniger Ressourcen benötigt werden sollen. Dies ist sozusagen der Best Case der Szenarien. Trotzdem soll, sollte dieses Szenario eintreffen, die Oberflächendurchschnittstemperatur bis 2100 um ca. 1.8 °C steigen. Wenn man dies berücksichtigt, kann man durch eine Abwandlung der Formel für das A2 Szenario auch eine Simulation für dieses Szenario erstellen, indem man sich dem Endwert für die Durchschnittstemperatur durch Abwandlung des Parameters der e Funktion immer weiter annähert.²¹

¹⁸ Abb.11 & 12

¹⁹Vgl. 2, 5 & 8

²⁰ Vgl. 2 & 5

²¹ Abb. 16 & 17

Das letzte Szenario des Programms hat keinerlei richtigen Bezug zur Realität, ist aber trotzdem interessant zu betrachten. In diesem Szenario nimmt der CO₂ Gehalt in unserer Atmosphäre immer weiter ab, bis er gegen Null geht. Dadurch pendelt sich die Temperatur nach ca. 500 Jahren bei etwas mehr als 11.3 Grad ein.²²

Abb.1

Multi-model Averages and Assessed Ranges for Surface Warming

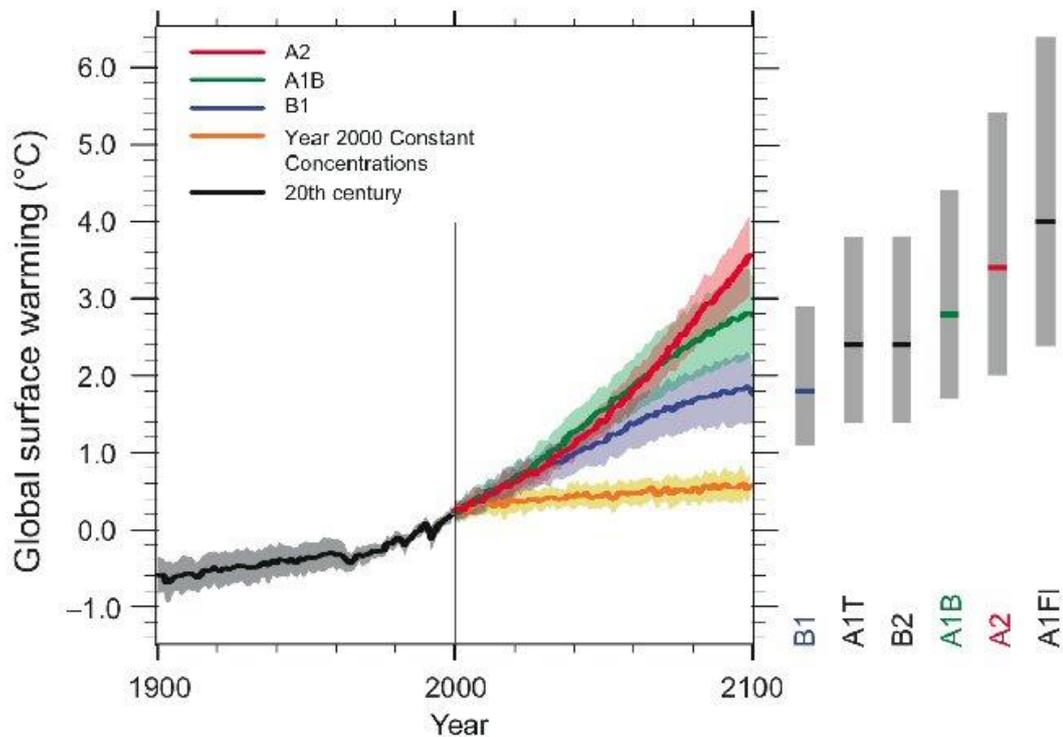


Abb.3²³

²² Abb. 18 & 19

²³ Siehe 8

Auswertung

Anhand der Ergebnisse der Berechnungen der Klimasimulation lässt sich Verschiedenes festmachen.

Zuallererst ist es interessant zu sehen, dass die errechneten Werte den Werten komplexerer Modelle ähneln, obwohl das implementierte Modell sehr stark vereinfacht ist und nur grundlegende Größen mit einbezogen wurden.²⁴

Insbesondere die Rolle des CO₂ Gehaltes in unserer Atmosphäre wird dadurch deutlich, da dieser ausschlaggebend für die Änderung der Temperatur ist. Es ist neben der Solarkonstante, die sich periodisch ändert, die einzige sich ändernde Größe im Modell und bei den Berechnungen der verschiedenen Szenarien sieht man, dass bei konstantem CO₂ Wert auch die Temperatur relativ konstant bleibt.

Außerdem wird durch den rapiden Anstieg der Temperatur beim A2 Szenario deutlich, wie stark der CO₂ Gehalt in unserer Atmosphäre unser Klima verändern kann. Es ist zudem eines der Treibhausgase, die zum Großteil vom Menschen verursacht werden und es ist deutlich sichtbar, dass der Mensch und die Industrialisierung Ursache für die starke Zunahme des CO₂ Gehalt in der Atmosphäre sind. Bis 1950 gab es in unserer Atmosphäre für ca. eine Millionen Jahren keinen höheren CO₂ Gehalt in der Atmosphäre als 300 ppm (parts per million)²⁵. Seitdem ist der Wert in die Höhe geschossen und das in kürzester Zeit²⁶. Mittlerweile erreichen wir Werte von bis 415²⁷. Der große Einfluss des CO₂ Gehaltes im Klimamodell und die mit der Industrialisierung gestiegenen CO₂ Werte zeigen, dass ein menschengemachter Klimawandel höchst wahrscheinlich ist. Da wir die ganze Zeit mit Näherungen rechnen und einer hohen Komplexität des Klimas, kann man mit Klimamodellen keine mathematisch exakten Resultate erzeugen. Doch lässt bereits dieses einfache Modell es zu, fundiert sagen zu können, dass durch den Menschen verursachtes CO₂ vermutlich in den nächsten Jahren zu einer spürbaren Klimaveränderung führen wird und, dass es daher sinnvoll ist, den CO₂ Ausstoß zu verringern.

Ein weiterer Punkt, der auffällt ist, dass alle Szenarien von denen das IPCC 2000 ausgegangen ist, einen Anstieg der Temperatur von mindestens 1.8 °C vorhersagen, was bereits ein beträchtlicher Wert ist, der nur im Best Case Szenario eintritt.

Hinzu kommt, dass viele weitere Entwicklungen, die Einfluss auf das Klima haben, im Modell nicht einbezogen sind. Beispielsweise gibt es verschiedene *Kippelemente* in unserem Ökosystem, die sich so stark auf das Klima auswirken können, dass irreversible Schäden bzw. Veränderungen verursacht werden

²⁴ Abb. 3 & Vgl. 3

²⁵ Abb. 4

²⁶ Abb. 15, vgl. 10

²⁷ Vgl. 11

können. Zum Beispiel durch das Schmelzen des Meereseis in der Arktis steigt nicht nur der Meeresspiegel²⁸. Der Albedo Wert der Erde, also der Wert, der angibt wie viel Strahlung wir reflektieren und somit nicht aufnehmen, hängt stark von den Eismassen unserer Erde ab. Sollten diese Schmelzen, kann sich dieser enorm erhöhen. Und einmal geschmolzenes Eis friert aufgrund des jetzt schon wärmeren Klimas nicht wieder ein.

Diese Änderungen sind noch nicht im Modell mit einbezogen und stellen eine weitere Gefahr für unser Klima da.

Abschließend lässt sich sagen, dass bereits dieses Klimamodell zeigt, dass Klimawandel eine ernst zu nehmende Entwicklung ist und der Mensch diesen beeinflusst und verlangsamen sollte.

²⁸ Vgl. 6

Erweiterungsmöglichkeiten

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, das vorhandene Modell zu erweitern.

Zum einen wäre es möglich, das Modell in die Eindimensionalität zu bringen und anstatt Durchschnittswerte für die ganze Welt zu verwenden, unser Ökosystem in verschiedene Zonen zu unterteilen und diese einzeln zu berechnen. Dadurch würde das Modell genauer werden.

Außerdem könnte man weitere Szenarien für die Entwicklung des CO₂ Gehalt der Atmosphäre erstellen, was jedoch schwierig ist, da man oft keine konkreten Zahlen zu zukünftig vermuteten Entwicklungen findet und somit nur schwer realistische Funktionen modellieren kann. So wäre es zum Beispiel interessant, aktuelle Szenarien zu haben, die neue Ideen und Entwicklungen mit einbeziehen und am besten, langfristig, eine Senkung des CO₂ Gehalt voraussagen.

Weitere Erweiterungsmöglichkeiten wären das Einbeziehen anderer Treibhausgase wie zum Beispiel Methan oder das Schmelzen der Polkappen, was durch eine temperaturabhängige Funktion für den Albedo Wert der Erde anstelle einer Konstante verwirklicht werden könnte.

Es lassen sich so gut wie alle Größen des Modells genauer und mithilfe von mehr Parametern berechnen. Auch die Wärmekapazität der Erde entspricht nicht ganz dem verwendeten Wert und verändert sich in der Realität auch. Hier werden beispielsweise die Meere als einziger Wärmespeicher im Modell verwendet. Außerdem könnte man überlegen, was für Auswirkungen es hätte, wenn die Wärmekapazität der Meere *ausgelastet* ist, da man aktuell davon ausgeht, dass die Meere die Erwärmung unseres Klima verlangsamen, aber nur bis zu einem bestimmten Punkt, und dass dann, sich die Erde noch schneller erwärmen wird.

Es gibt aber auch Effekte, die der Erderwärmung entgegenwirken, die ebenfalls mit in das Modell einbezogen werden könnten. Diese sind jedoch meist sehr gering oder einer Entwicklung verbunden, die der Umwelt eher schadet und daher zu vernachlässigen sind. Sollten zum Beispiel die Polkappen schmelzen, hätten wir mehr Wasser, welches die Wärme speichern könnte. Dies wäre aber eher uninteressant vor dem Hintergrund, dass der Albedo Wert der Erde sinken würde und voraussichtlich Gebiete auf der ganzen Welt überschwemmt werden würden.

Das Programm an sich ließe sich ebenfalls erweitern. Zum einen könnte man weitere Parameter, die sich in der GUI verändern ließen, einführen, wie beispielsweise einen anderen Startwert für die Innere Energie und somit eine andere Ausgangstemperatur. Man könnte so dann auch ein anderes Ausgangsjahr als 2005 wählen und das Programm einfacher aktuelleren Situationen anpassen. Dazu wäre es auch möglich, einen variablen

Ausgangswert für den CO₂ Gehalt der Atmosphäre einführen. Da die Formeln jedoch empirisch ermittelt und auf vergangene Werte angepasst sind, könnte dies langfristig zu größeren Unstimmigkeiten führen.

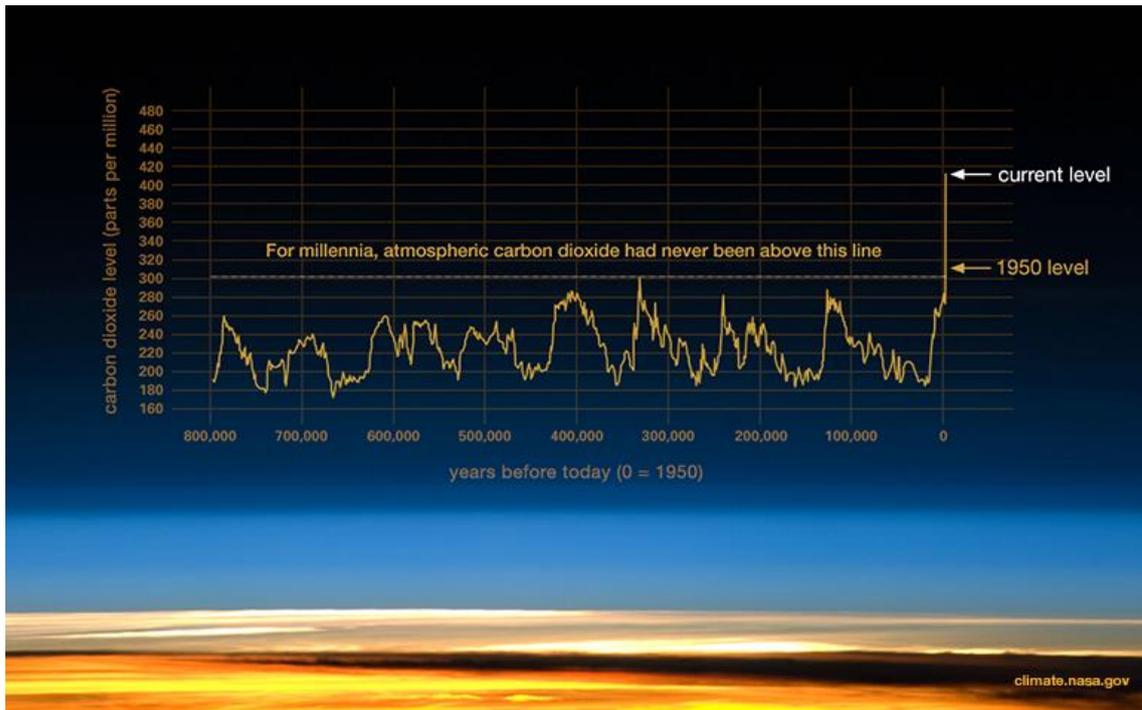
Außerdem ließe sich die Ausgabe und Veranschaulichung der Werte verbessern. Man könnte die Möglichkeit hinzufügen, eine Tabelle mit den berechneten Werten auszugeben, die am besten speicherbar wäre, oder den Graphen erweitern, indem man es möglich macht, mehrere Graphen auf einmal dazustellen oder das Koordinatensystem allgemein verschönern, mit einem Gitter und mehr Werten an den Achsen. Es wäre ebenfalls möglich, es dem Benutzer der Anwendung zu ermöglichen, selbst einzustellen, welches Fenster des Koordinaten-Systems er sehen möchte, wenn man nur die Werte in einem bestimmten Bereich sehen möchte, dafür aber diese besonders gut, um kleinere Schwankungen besser erkennen zu können oder einfacher vergleichen zu können.

Literaturverzeichnis

- 1.(20. März 2020). Von http://www.mathe.tu-freiberg.de/~eiermann/Vorlesungen/ODE/Folien/ode_4_alt.pdf abgerufen
- 2.(20. März 2020). Von <https://bildungserver.hamburg.de/unsicherheiten-und-szenarien/2080818/ipcc-szenarien-artikel/> abgerufen
- 3.Bell, T. (September 2009). Das Klima modellieren - (k)ein Thema für den Unterricht? *Unterricht Physik*, S. 55-60.
- 4.Buchal, C., & Christian-Dietrich, S. (2016). *Klima - Die Erde und ihre Atmosphäre im Wandel der Zeit*. Gütersloh.
- 5.IPCC. (20. März 2020). *ipcc-data*. Von http://www.ipcc-data.org/sim/gcm_clim/SRES_TAR/ddc_sres_emissions.html abgerufen
- 6.*klimaverstehen*. (20. März 2020). Von <https://www.klimaverstehen.de/kippelemente/> abgerufen
- 7.Kohorst, H., Portscheller, P., & Goldkuhle, P. (20. März 2020). Von <http://www.kohorstlemgo.de/modell/euler.htm> abgerufen
- 8.narccap. (20. März 2020). Von <http://www.narccap.ucar.edu/about/emissions.html> abgerufen
- 9.Nasa. (20. März 2020). Von https://climate.nasa.gov/climate_resources/24/graphic-the-relentless-rise-of-carbon-dioxide/ abgerufen
- 10.*nationalgeographic*. (20. März 2020). Von <https://www.nationalgeographic.org/encyclopedia/keeling-curve/> abgerufen
- 11.*Time*. (3. März 2020). Von <https://time.com/5588794/carbon-dioxide-earth-climate-change/> abgerufen
- 12.*Wikipedia*. (20. März 2020). Von https://de.wikipedia.org/wiki/Explizites_Euler-Verfahren abgerufen
- 13.*Wikipedia*. (20. März 2020). Von <https://de.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta-Verfahren> abgerufen

Anhang:

Abb.4



Quell 9 (https://climate.nasa.gov/climate_resources/24/graphic-the-relentless-rise-of-carbon-dioxide/)

Abb.5: Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Monate, A2

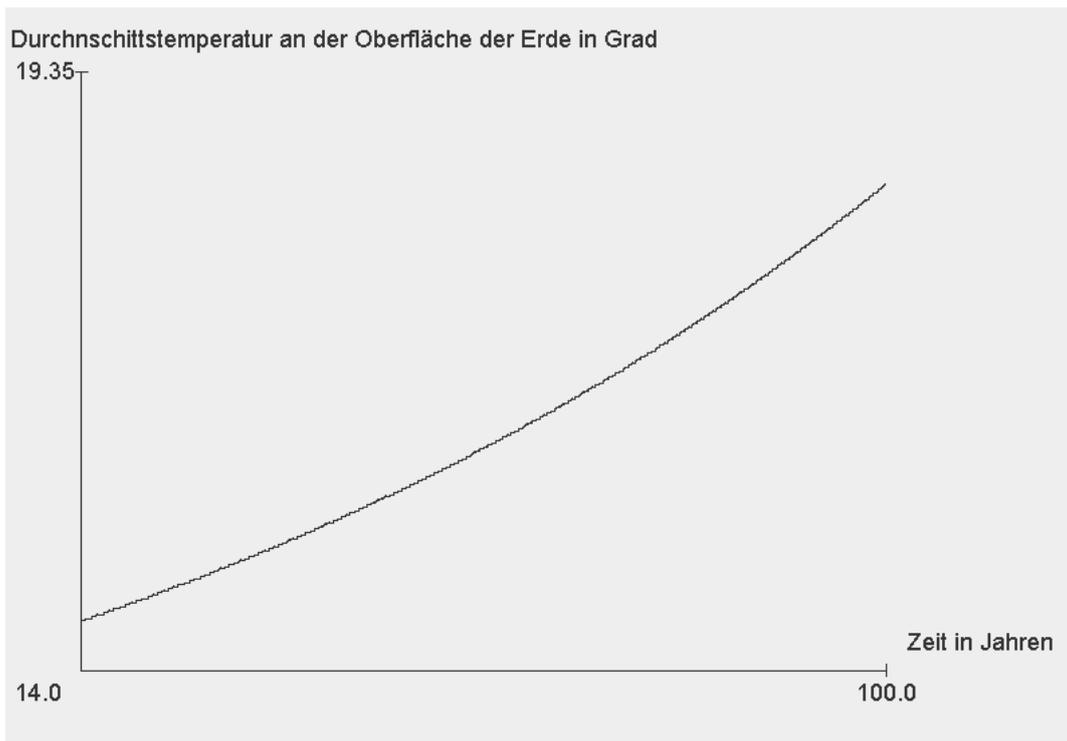


Abb.6: Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Monate,A2

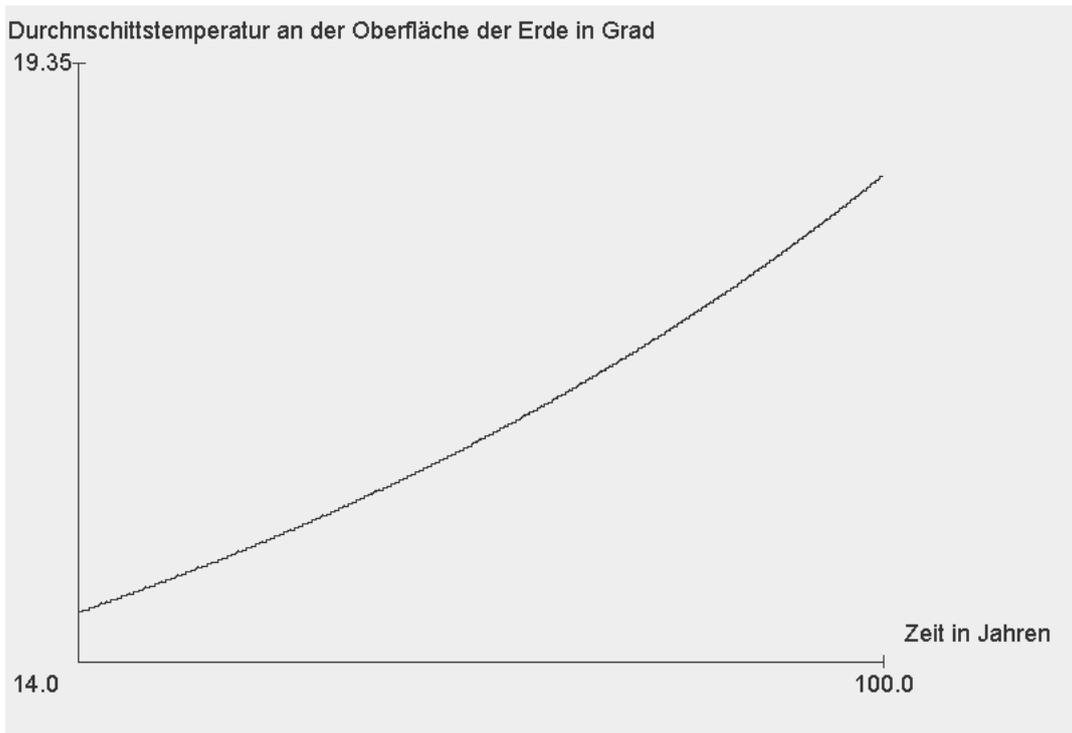


Abb.7: Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Jahr, A2

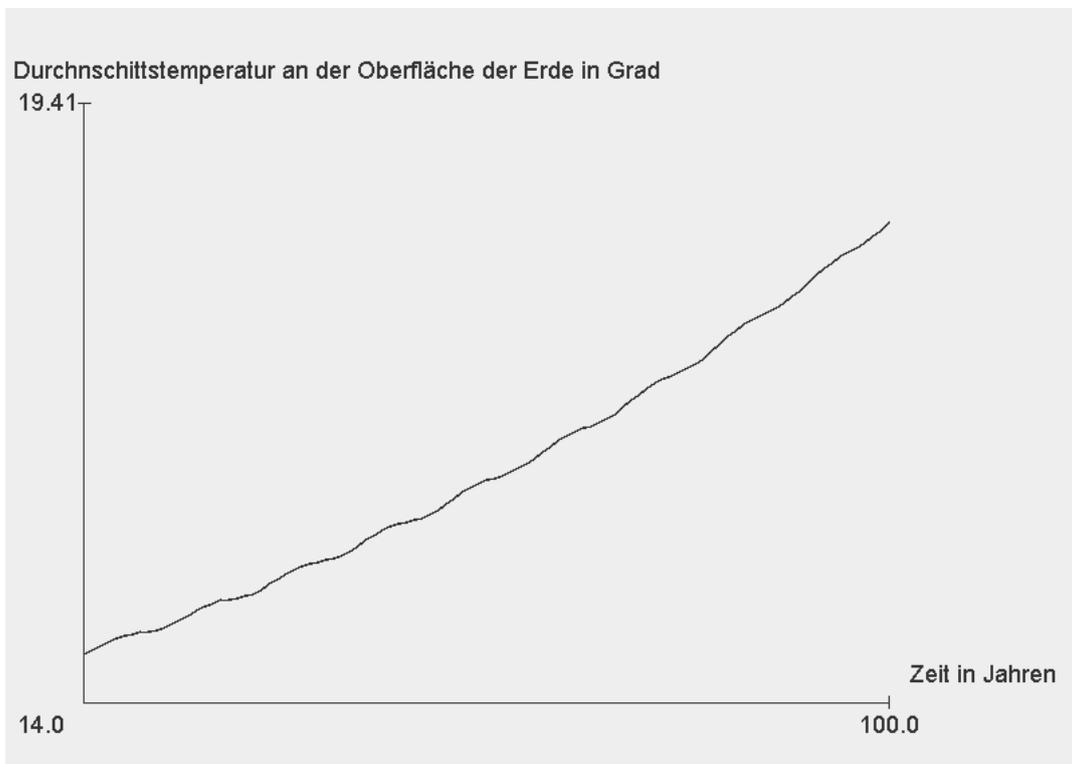


Abb.8 Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite 1 Jahr, A2



Abb.9 Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite 4 Jahre, A2

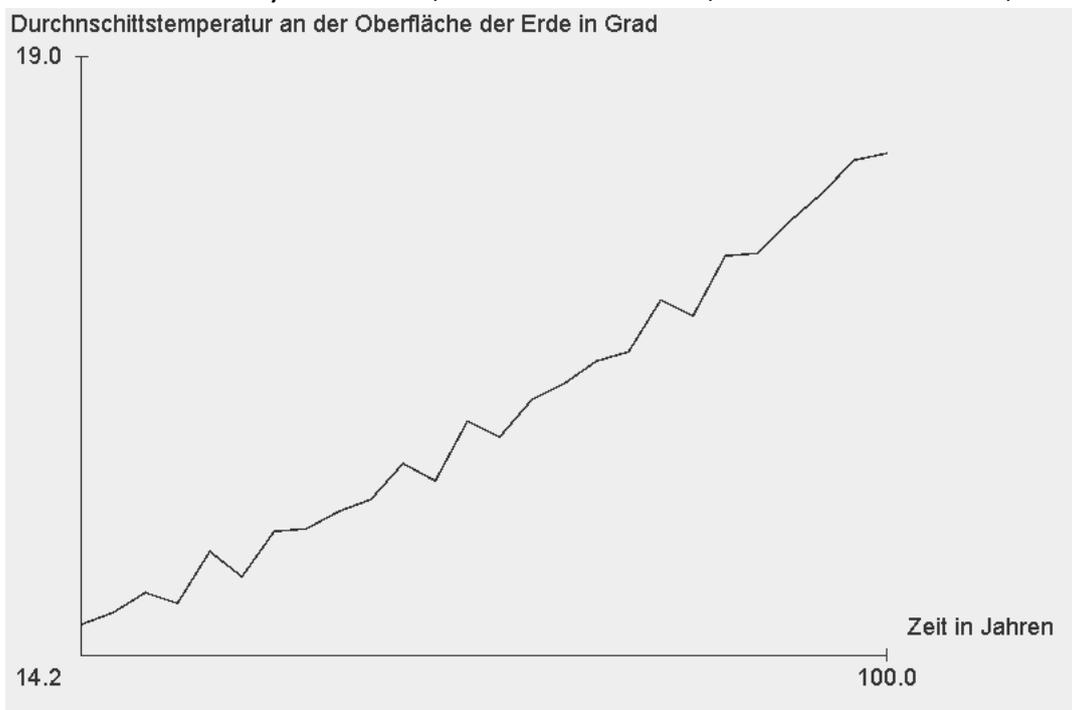


Abb.10 Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite 4 Jahre ,A2

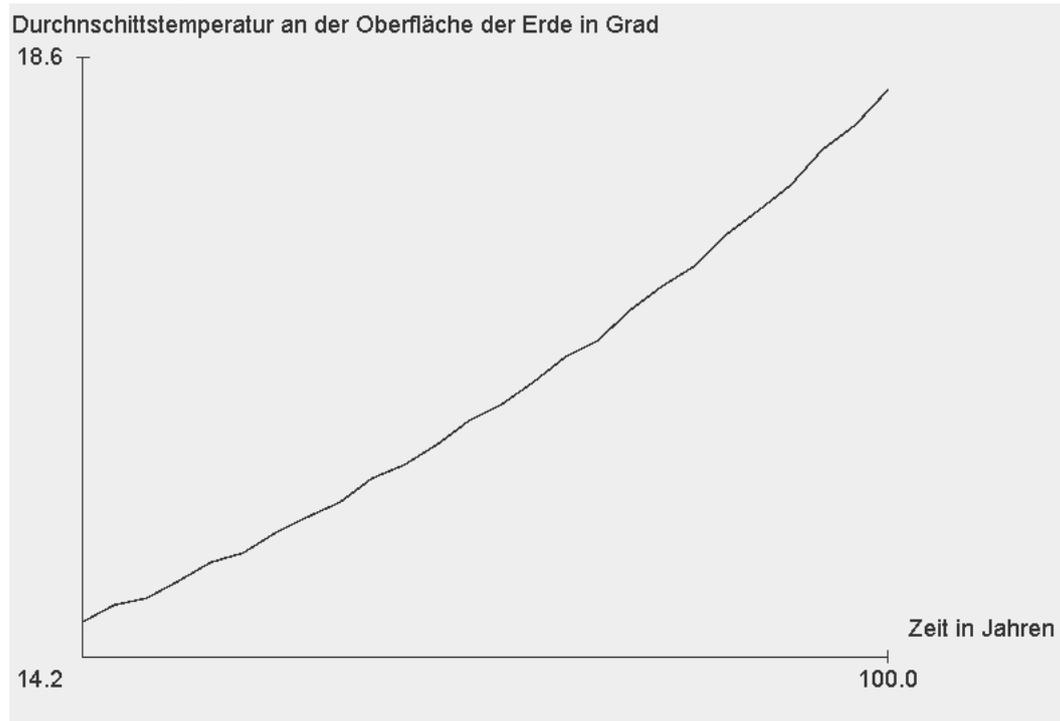


Abb.11 Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite 1 Monat, Konstantes CO₂

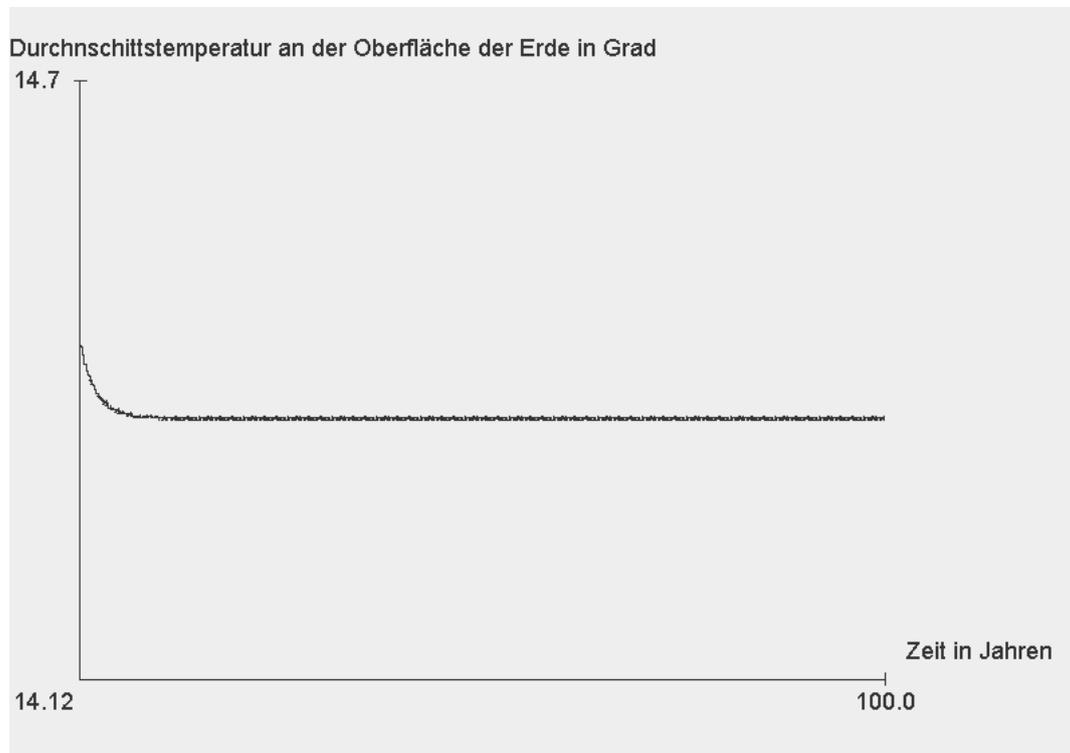


Abb.12: Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Monate, Konstantes CO₂

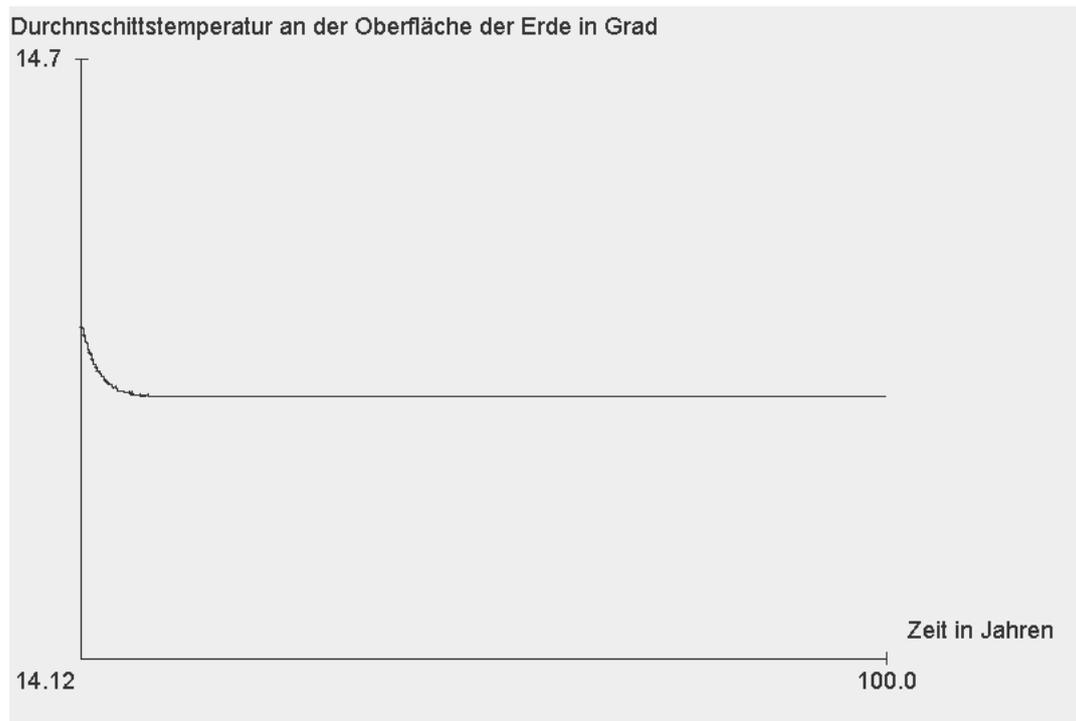


Abb.13: Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Jahr, Konstantes CO₂

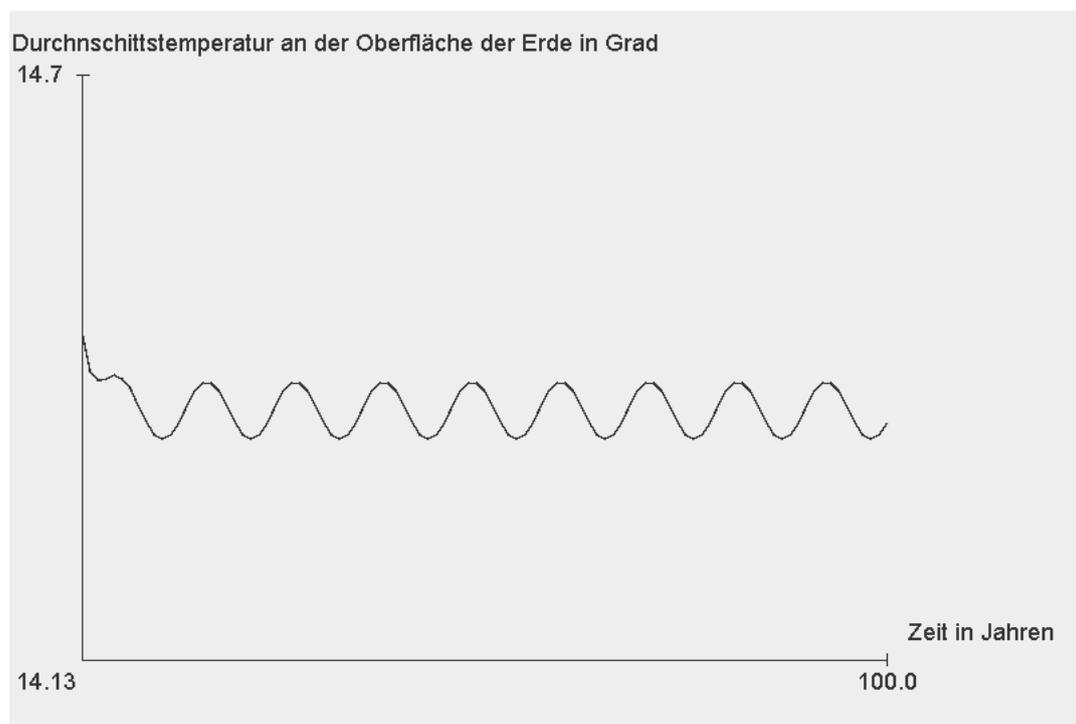


Abb.14: Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: 1 Jahr, Konstantes CO₂

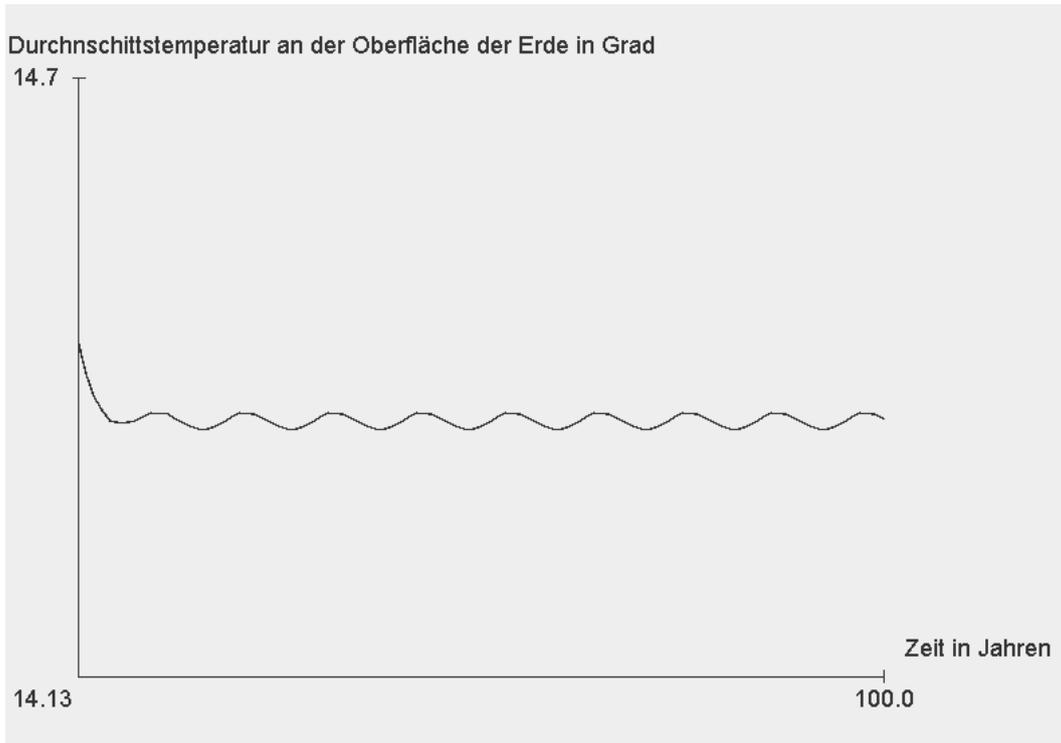
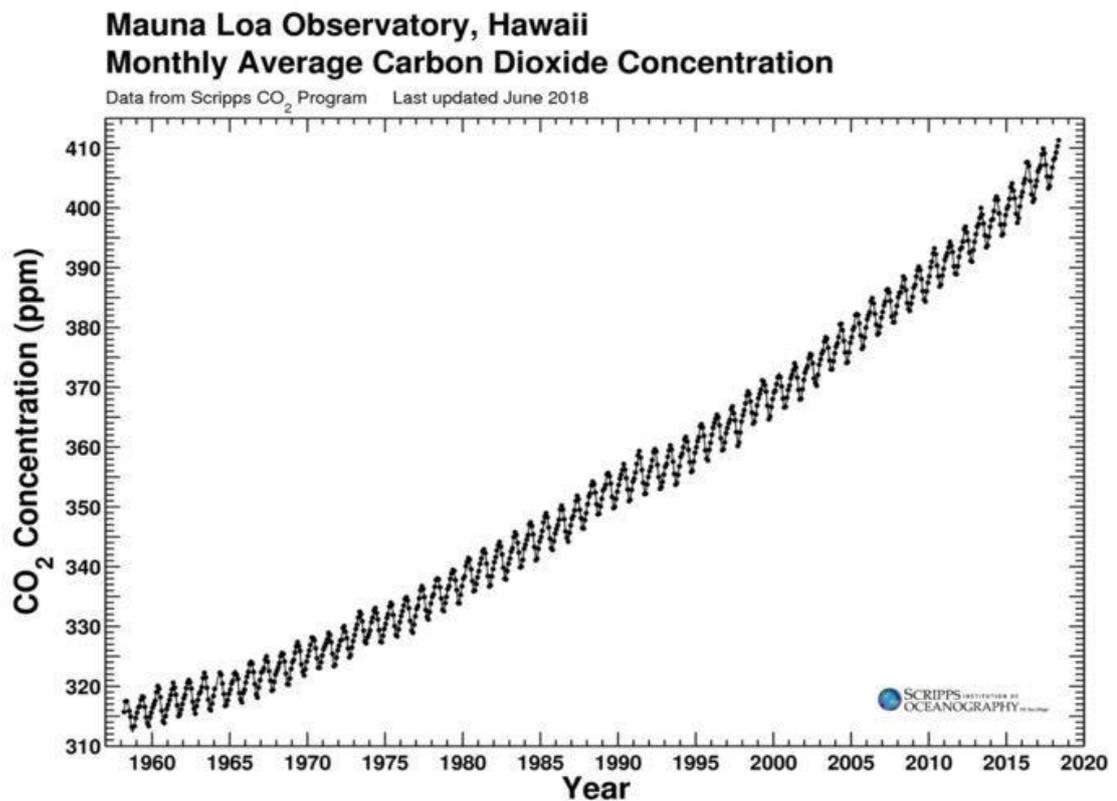


Abb.15 Keeling Kurve ²⁹



Quelle : <https://www.nationalgeographic.org/encyclopedia/keeling-curve/> (10)

²⁹ Quelle 10

Abb.16 Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: ein Monat, B1

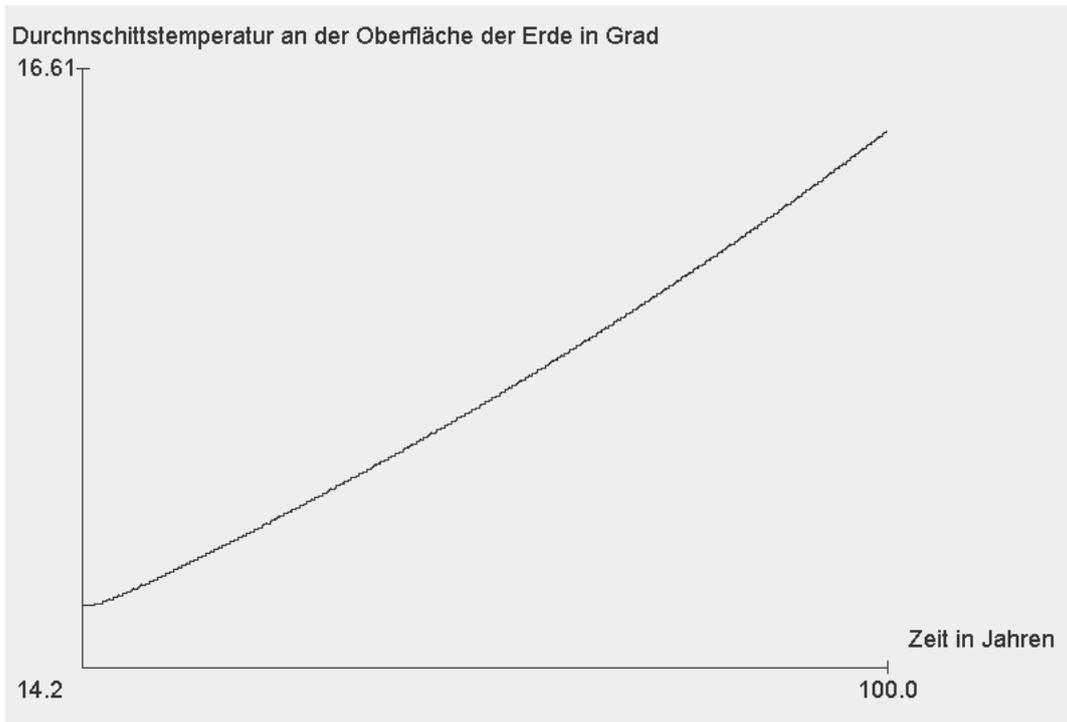


Abb.17 Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: ein Monat, B1

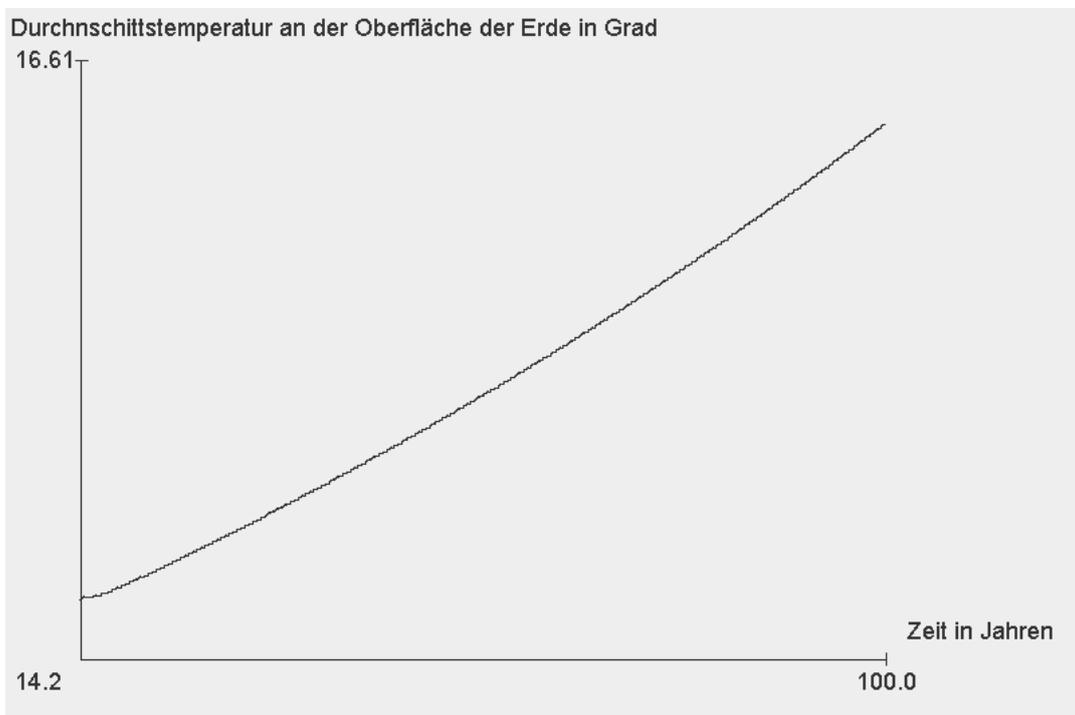


Abb.18 Euler-Cauchy Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: ein Monat, Szenario: „Abstieg“

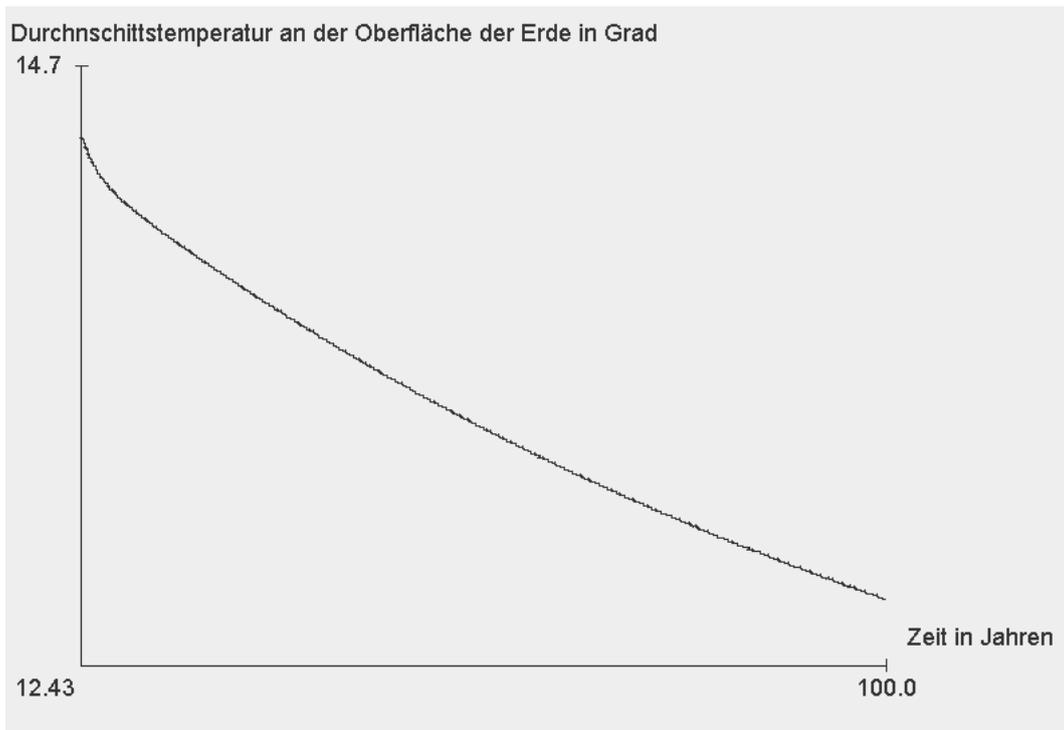


Abb.19 Runge-Kutta Verfahren, Endzeit: 100 Jahre, Schrittweite: ein Monat, Szenario: „Abstieg“

