

Vollständige Funktionsuntersuchung mit CAS:

Gegeben: $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

1.) Ableitungen bestimmen:

Definiere $f(x)$:

CAS: $f(x) := 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 \rightarrow$ Fertig

Bestimme die ersten drei Ableitungen:

CAS: $f_1(x) := \frac{d}{dx}(f(x)) \rightarrow$ Fertig

CAS: $f_2(x) := \frac{d}{dx}(f_1(x)) \rightarrow$ Fertig

CAS: $f_3(x) := \frac{d}{dx}(f_2(x)) \rightarrow$ Fertig

Überprüfe auf Richtigkeit:

CAS: $f_1(x) \rightarrow 8x^3 + 21x^2 + 10x$

CAS: $f_2(x) \rightarrow 24x^2 + 42x + 10$

CAS: $f_3(x) \rightarrow 48x + 42$

} optional

2.) Symmetrie des Graphen:

Prüfe auf y -Achsensymmetrie. Es muss gelten: $f(x) = f(-x)$

CAS: $f(x) = f(-x) \rightarrow 2x^4 + 7x^3 + 5x^2 = 2x^4 - 7x^3 + 5x^2$

Es liegt keine y -Achsensymmetrie vor.

Prüfe auf Punktsymmetrie zum Ursprung. Es muss gelten $f(-x) = -f(x)$

CAS: $f(-x) = -f(x) \rightarrow 2x^4 - 7x^3 + 5x^2 = -2x^4 - 7x^3 - 5x^2$

Funktionen unterscheiden sich, also liegt auch keine Punkts. vor.!

Alternativ: Argumentation mithilfe der Exponenten (siehe Bud)

3.) Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ und x nahe 0:

CAS: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) \rightarrow \infty$ Für $x \rightarrow \infty: f(x) \rightarrow \infty$

CAS: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) \rightarrow \infty$ Für $x \rightarrow -\infty: f(x) \rightarrow \infty$

$5x^2$ bestimmt das Verhalten von $f(x)$ für x nahe 0. Für x nahe 0 verhält sich $f(x)$ wie $ax^2 = 5x^2$ (nach oben geöffnete Parabel)

4.) Krümmungsverhalten:

überprüfe, in welchen Intervallen die 2. Ableitung größer oder kleiner Null ist.

$$\text{CAS: solve}(f_2(x) < 0, x) \rightarrow -\frac{(\sqrt{201}+21)}{24} < x < \frac{\sqrt{201}-21}{24}$$

$$\text{CAS: solve}(f_2(x) > 0, x) \rightarrow x < \frac{-(\sqrt{201}+21)}{24} \text{ or } x > \frac{\sqrt{201}-21}{24}$$

Die Funktion f ist rechtsgekrümmt für $-1,46 < x < -0,28$ und linksgekrümmt für $x < -1,47$ oder $x > -0,28$.

(Ergebnisse mit Ctrl | Enter in dezimaler Schreibweise mit CAS angegeben und sinnvoll gerundet)

5.) Nullstellen:

Es muss gelten: $f(x) = 0$:

$$\text{CAS: solve}(f(x) = 0, x) \rightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ or } x = -1 \text{ or } x = 0$$

Die Nullstellen von f liegen bei $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ und $x_3 = -2,5$

Die zugehörigen Schnittpunkte lauten: $N_1(0|0)$, $N_2(-1|0)$ und $N_3(-2,5|0)$. [CAS: $f(-2,5) \rightarrow 0$ usw.]

6.) Extremstellen / Extrempunkte:

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f'(x) = 0$:

$$\text{CAS: solve}(f_1(x) = 0, x) \rightarrow x = -2 \text{ or } x = -\frac{5}{8} \text{ or } x = 0$$

Die möglichen Stellen liegen bei $x_1 = -2$, $x_2 = -\frac{5}{8}$ und $x_3 = 0$

Hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$:

Setze die möglichen Stellen in $f''(x)$ ein:

$$\text{CAS: } f_2(-2) \rightarrow 22$$

$$f_2(-\frac{5}{8}) \rightarrow -\frac{55}{8}$$

$$f_2(0) \rightarrow 10$$

Die hinreichende Bedingung ist bei allen drei Stellen erfüllt. Da $f''(-2) = 22 > 0$ liegt dort ein Tiefpunkt, da $f''(-\frac{5}{8}) = -\frac{55}{8} < 0$ liegt dort ein Hochpunkt,

und da $f''(0) = 10 > 0$, liegt bei $x_3 = 0$ ein Tiefpunkt.

Berechne die Hoch- und Tiefpunkte: Setze x_1, x_2 und x_3 in $f(x)$ ein:

$$\text{CAS: } f(-2) \rightarrow -4$$

$$f(0) \rightarrow 0$$

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) \rightarrow \frac{1125}{2048}$$

Die Hoch- und Tiefpunkte lauten: $H\left(-\frac{5}{8} \mid \frac{1125}{2048}\right) \approx (-0,625 \mid 0,55)$
 $T_1(0 \mid 0), T_2(-2 \mid -4)$.

7.) Wendestellen/Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x) = 0$:

$$\text{CAS: solve}(f_2(x) = 0, x) \rightarrow x = \frac{-(\sqrt{201} + 21)}{24} \text{ or } x = \frac{\sqrt{201} - 21}{24}$$

$$\text{CAS: "Ctrl Enter"} \rightarrow x = -1.46573 \text{ or } x = -0.284273$$

Hinreichende Bedingung für WST: $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$:

$$\text{CAS: } f_3\left(\frac{-(\sqrt{201} + 21)}{24}\right) \rightarrow -2 \cdot \sqrt{201}$$

$$\text{CAS: } f_3\left(\frac{\sqrt{201} - 21}{24}\right) \rightarrow 2 \cdot \sqrt{201}$$

Die hinreichende Bedingung ist für beide Stellen erfüllt.

Berechne die Wendepunkte:

$$\text{CAS: } f\left(\frac{-(\sqrt{201} + 21)}{24}\right) \rightarrow -2.06968$$

$$\text{CAS: } f\left(\frac{\sqrt{201} - 21}{24}\right) \rightarrow 0.25631$$

Die Wendepunkte lauten $\approx W_1(-1,47 \mid -2,07)$
 $\approx W_2(-0,28 \mid 0,26)$

8.) Graph zeichnen mit CAS:

Skizze!

