

Vollständige Kurvendiskussion von $g(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$

Neues Dokument auf dem CAS- öffnen. Die Funktion wird mit " := " definiert.

CAS: $g(x) := x^3 - 8x^2 + 16x \rightarrow$ fertig.

Anschließend werden mit Hilfe des Befehls "shift" + "-" die ersten 3 Ableitungen definiert.

ChS: $g_1(x) := \frac{d}{dx}(g(x)) \rightarrow$ fertig

CAS: $g_2(x) := \frac{d}{dx}(g_1(x)) \rightarrow$ fertig

CAS: $g^3(x) := \frac{d}{dx}(g^2(x)) \rightarrow \text{fertig}$

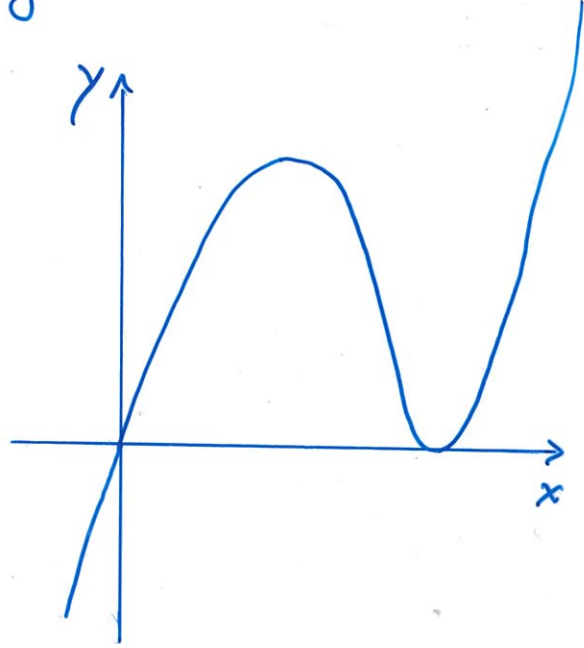
Kontrolle

$$g_1(x) \mapsto 3x^2 - 16x + 16$$
$$g^2(x) \hookrightarrow 6x - 16$$
$$g^3(x) \rightarrow 6$$

Graph:

Mit Hilfe des CAS lässt man sich zunächst den Graph angeben. Hierzu öffnet man ein Graphikfenster "ctrl" + "+page" + "2".

Über "menu" + "4" + "1" kann man bei der Fenstereinstellung den Anzeigebereich verändern



Nullstellen

n. Bed.: $f(x) = 0$

mit Hilfe des CAS erhält man die Nullstellen $x=0$ und $x=4$, wobei $x=4$

CAS: solve $(g(x)=0, x) \rightarrow x=0$ or $x=4$

eine doppelte Nullstelle ist, d.h. bei $x=4$ liegt ebenfalls eine Extremstelle vor.

Dies erkennt man gut, wenn man $g(x)$ in faktorisierter Form angibt

CFS: $\text{factor}(g(x)) \rightarrow x \cdot \underbrace{(x-4)^2}$

← einfache Nullstelle bei $x=0$

↘ Zweifache Nullstelle für $x=4$

einfache Nullstelle bei $x=0$

Die Nullstellen stimmen mit dem Graphen überein.

Extremstellen:

n. Bed. $f'(x) = 0$

CAS: solve $(g_1(x)=0, x) \hookrightarrow x = \frac{4}{3}$ or $x = 4$

hin. Bed.

$$f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

wenn $f''(x) > 0$ dann TP

wenn $f''(x) < 0$ dann HP

$$\text{CAS: } g\left(\frac{4}{3}\right) \hookrightarrow -8 \Rightarrow \text{HP}$$

$$\text{CAS: } g\left(\frac{4}{3}\right) \hookrightarrow \frac{256}{27}$$

$$\text{CAS: } g(4) \hookrightarrow 8 \Rightarrow \text{TP}$$

$$\text{CAS: } g(4) \hookrightarrow 0$$

NST wie oben
schon vermutet.

Somit gibt es zwei lokale Extrema: einen Hochpunkt bei $\text{HP}\left(\frac{4}{3} \mid \frac{256}{27}\right)$ und einen lokalen Tiefpunkt bei $\text{TP}(4 \mid 0)$

Wendepunkte:

n. Bed. $f''(x) = 0$

$$\text{CAS: solve}(g''(x) = 0, x) \hookrightarrow \frac{8}{3}$$

hin. Bed. $f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$

$$\text{CAS: } g\left(\frac{8}{3}\right) \hookrightarrow 6 \Rightarrow \text{R-L-Wendepunkt}$$

y-Wert

$$\text{CAS: } g\left(\frac{8}{3}\right) \hookrightarrow \frac{128}{27}$$

Somit liegt bei $W\left(\frac{8}{3} \mid \frac{128}{27}\right)$ ein Wendepunkt vor ($\approx W(2,6 \mid 4,74)$)
dies wird vom Graphen bestätigt.

Symmetrie

Da die Funktion $g(x)$ nicht achsensymmetrisch (as) zur y -Achse ist, lässt sich schon am größten Exponenten erkennen (ungerade).

n. Bed. Achsensymmetrie zur y -Achse:

$$g(x) = g(-x)$$

$$\text{CAS: solve}(g(x) = g(-x), x) \hookrightarrow \text{false}$$

n. Bed. Punktsymmetrie zum Ursprung:

$$g(x) = -g(-x)$$

$$\text{CAS: solve}(g(x) = -g(-x), x) \hookrightarrow \text{false}$$

Vermutung: $g(x)$ ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $\text{WP}\left(\frac{8}{3} \mid \frac{128}{27}\right)$

Transformation: Verschiebung von $g(x)$, so dass WP im Ursprung

$$\text{CAS: } h(x) := g\left(x + \frac{8}{3}\right) - \frac{128}{27}$$

$$\text{CAS: solve}(h(x) = -h(-x), x) \hookrightarrow \text{true} \Rightarrow g(x) \text{ ist ps zum Wendepunkt}$$